L22 The second Fundamental thm of Integral calculus (conti.)(續.微積分第二基本定理)
5.7 The u-substitution(變數變換)

Q:Mean-value thm. for integral 是什麼？

A:如果函數在 ab 連續，則存在一個 c 在 ab 開區間內使得 ab 定積分等於(b-a)乘 f(c).

The second fundamental thm. of Integral calculus 用來幫我們計算定積分，定積分大多數都用它找到。

Thm:積分的四則運算，沒有除法。乘法在後面討論

Let f and g :[a,b]→ℝ be cont.

① $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b \alpha f(x)dx, \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$

② $\int_a^b \alpha f(x)dx + \beta g(x) = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

pf:

可以用原來的定義來證 Uf(P)的極限、Lf(P)的極限存在且相等。我們用定理證。

Q:The second fundamental thm. of integral 是什麼？

A:如果 G 在[a,b]是 f 的 antiderivative，則 f 在[a,b]的定積分等於該 antiderivative 頭尾的取值相減。

時間不會停留的，過了就過了。你終究會畢業，如果在你在大學沒有培養解決事情的能力，那個時候你就會知道時間不能從來。你沒有那個能力就沒有那個能力。大學有它一套配合它體材的學習方式，這個跟高中不一樣，沒辦法我跟你說你需要這個，那你就有了，人家只能給你方向，至於你能不能做到那件事情，那要靠你自己的努力。你不知道方向那你沒有辦法，你知道方向那你不能做到那也不行。成功的人是有機會製造方向，同時他又毅力跟努力變成自己的能力。

還是要在課堂上學習，你就是要定期的複習，就算你不想做習題，不然你上課沒辦法聽。很多同學他覺得不上課不心安，高老師上的很好，不聽很可惜，但是聽沒有什麼用，那又不是你的。

By the way~

昨天那個題目，你必須要說它可積

定積分如果會存在，你可以算 Uf(P)的極限、Lf(P)的極限、Riemann sum 的極限。

可積是 Uf(P)的極限、Lf(P)的極限存在且相等，不是 Riemann sum 的極限存在。

Riemann sum 的極限是介在頭尾，中間的極限沒辦法保證頭尾極限存在且相等，但頭尾極限存在且相等中間就會存在。

有一個定理說如果連續或可積的話，中間 Riemann sum 極限會存在等於定積分。

可積是證 Uf(P)的極限、Lf(P)的極限存在且相等。引用一個定理證 Riemann sum 極限。

L22 The second Fundamental thm of Integral calculus (conti.)(續.微積分第二基本定理)
5.7 The u-substitution(變數變換)

② 根據那個定理，必須找一個antiderivative

∵ f and g are cont. [a,b]

∴ α f and β g are cont. [a,b]

Q:為什麼一個函數連續，一定有 antiderivative？
A:因為它的面積函數會等於它自己。
Q: antiderivative 你知道一個你就知道所有個，怎麼知道？
A:找到其中一個加任意常數。

Let F and G be antiderivatives for f and g on [a,b] respediwely.

Then F'=f and G'=g on [a,b]. 宣稱輔助函數的性質，只需要說用到的

⇒(α F+ β G)'= α f+ β g on [a,b]. 需要這步來說明找到了

⇒ α F+ β G is an antiderivative for α f+ β g on [a,b].

By second fundamental thm. of integral calculus→

$$=\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=[\alpha F(b)-\beta G(b)]-[\alpha F(a)-\beta G(a)]$$

= α (F(b)-F(a))+ β (G(b)-G(a))

By second fundamental thm. of integral calculus←反過來用

$$=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

Q:剛剛那個定理在講什麼？
A:相加在取定積分等於分別做定積分在相加。

eg.① $\int_0^1 (2x-6x^3+5x^{\frac{1}{2}})dx$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2-6\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4+5\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{3}{2}+\frac{10}{3}-0=-\frac{5}{6}$$

L22 The second Fundamental thm of Integral calculus (conti.)(續.微積分第二基本定理)
5.7 The u-substitution(變數變換)

eg.② $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\left[2\tan x - 5\sec x\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[2\tan x\sec x - 5\sec^2 x\right]dx$

$= 2\sec x - 5\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 5 - (2-0) = 2\sqrt{2} - 7$

Ex:P258(8.14.16.26.32.49.61.62.63.64)、P289(15.20.21.22)

§ 5.5 Some area problems (自己看)

§ 5.7 The u-substitution

這個定理只是計算的過程

Thm: ∫ f(g(x))g'(x)dx= ∫ f(u)du

pf:基本假設是連續

Let F(u) be an antidervative for f(u) and u=g(x)

Then dF/du=f(u)

Moreover dF(u)/dx=dF(u)/du · du/dx=f(u) · g'(x)=f(g(x))g'(x)

⇒ ∫ dF(u)/dx dx = ∫ f(g(x))g'(x) dx

∫ dF(u)/dx dx =F(u)+C= ∫ f(u)du

L22 The second Fundamental thm of Integral calculus (conti.)(續.微積分第二基本定理)
5.7 The u-substitution(變數變換)

Thm:

$$\int_{a}^{b} f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Let u=g(x) (Then du/dx=g'(x))⇒then du=g'(x)dx

eg.

① $\int (x^2-1)^4 2xdx = ?$

pf:

Let u=(x^2-1), then du=2xdx

$$\int (x^2-1)^4 2xdx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x^2-1)^5 + C$$

② $\int \sin x \cos x dx = ?$

pf:

Let u=sinx, then du=cosxdx

$$\int \sin x \cos x dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

③ $\int \frac{dx}{(3+5x)^2} = ?$

pf:

Let u=3+5x, then du=5dx

$$\int \frac{dx}{(3+5x)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{3+5x} + C$$